Ответы и решения задач «красного» уровня сложности MathCat.ONLINE

1. (5 баллов) Задача из повести “Витя Малеев в школе и дома” Н.Н. Носова. "В магазине было 8 пил, а топоров в три раза больше. Одной бригаде плотников продали половину топоров и три пилы за 84 рубля. Оставшиеся топоры и пилы продали другой бригаде плотников за 100 рублей. Сколько стоит один топор и одна пила?"

Ответ: 5; 8.
Решение: Топоров было 24; одной бригаде достались 3 пилы и 12 топоров, а другой – 5 пил и 12 топоров. Разница стоимости равна цене двух пил, следовательно, одна пила стоит (100-84) : 2 = 8 рублей. Поэтому топор стоит (100-5*8) : 12 = 5 рублей.

2. (5 баллов) Числа *a*, *b*, *c*, *d* удовлетворяют системе уравнений:

$$a+b+c=1$$
$$a+b+d=3$$
$$a+c+d=5$$
$$b+c+d=6$$

Чему равна сумма наибольшего и наименьшего из этих чисел?

Ответ: 3.
Решение: Обозначим сумму всех чисел через S. Тогда уравнения можно переписать в виде S-d=1, S-c=3, S-b=5, S-a=6, откуда d=S-1, c=S-3, b=S-5, a=S-6. Следовательно, d - наибольшее, а a - наименьшее из чисел. Следовательно, d+a=2S-7. Осталось найти S, для чего запишем сумму уравнений: (S-d)+(S-c)+(S-b)+(S-a)=4S-S = 1+3+5+6=15, т.е. 3S=15, S=5, поэтому 2S-7=3.

3. (8 баллов) В прямоугольнике *ABCD* сторона *BC* в два раза больше стороны *AB*. На продолжении стороны *BC* за точку С выбрана точка *E* так, что угол *CED* равен 30°. *F* - середина стороны *BC*. Найдите величину угла *FAE*.

Ответ: 30°.
Решение: Из условия, $CE = 2CD = DA$. Так как $\angle ADE = 150°$, то $\angle EAD = \angle AED = 15°$, а $\angle FAE = 45°-15°=30°$

4. (8 баллов) В закрытом ящике лежат 100 носков пяти разных цветов. Известно, что если вытащить из ящика наугад любые 90 носков, то среди них обязательно найдутся носки всех цветов. Какое число носков нужно вытащить из ящика, чтобы среди вытащенных гарантированно нашлись носки хотя бы двух разных цветов?

Ответ: 57.
Решение: Носков каждого цвета не менее 11, потому что если бы был цвет с меньшим количеством, то всех остальных цветов было бы не менее 90, и значит, можно было бы

вытащить 90 носков не более чем четырёх цветов. Следовательно, носков каждого цвета не более 56 (при 57 одноцветных носках на остальные 4 цвета пришлось бы не более 43 носков, а значит, какого-то из этих цветов было бы не более 10). Поэтому достаточно вытащить из ящика 57 носков. (Нетрудно также построить пример, когда вытащить меньшее количество недостаточно: 11, 11, 11, 11 и 56.)

5. (9 баллов) Решите числовой ребус 4*ЕЛЬНИК=3*НИКЕЛЬ (различными буквами обозначены различные цифры). В ответе впишите число ЕЛЬНИК.

Ответ: 428571.
Решение: В словах ЕЛЬНИК и НИКЕЛЬ переставляются целиком два трехзначных куска ЕЛЬ и НИК. Обозначим их x и y. Тогда ребус можно переписать в виде $4(1000x+y)=3(1000y+x)$; $3997x=2996y$. После сокращения на 7 получаем несократимое равенство $428y = 571x$, откуда и получается, что $x=428$, а $y=571$.

6. (11 баллов) Имеются две банки емкостью 1 и 3 л. Из содержимого этих банок можно приготовить 0.5 л смеси, содержащей 30% яблочного сока, и 3.5 л смеси, в которой содержание сока равно 90%. Каково процентное содержание сока в каждой из банок?

Ответ: 30%; 100%
Решение: Ясно, что одна из банок содержит не более чем 30%-ную смесь. Также ясно, что в 3.5 л находится не менее чем 0.5 л “более слабой” смеси. Поэтому процент сока в этой смеси не может быть выше, чем (0.5*0.3+3*1)/3.5 * 100% = 90%. Так как по условию он ровно такой и есть, то мы понимаем, что в трёхлитровой банке находится 100%-ный сок, а в литровой – 30%-ный.

7. (12 баллов) *E* – произвольная точка на окружности, вписанной в квадрат *ABCD* со стороной 2. Найдите сумму квадратов расстояний от *E* до всех вершин квадрата.

Ответ: 12.
Решение: Введём систему координат, начало которой совпадает с центром квадрата, а оси - с направлениями его сторон. Тогда вершины квадрата будут иметь координаты (-1,-1), (-1,1), (1,-1) и (1,1). Для произвольной точки с координатами (x,y) сумма квадратов расстояний до четырех вершин – это $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (x+1)^2 + (y-1)^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4x^2+4y^2+8$. Но если точка лежит на вписанной в квадрат окружности, то ее расстояние до центра квадрата равно 1, откуда $4x^2+4y^2+8 = 4(x^2+y^2)+8=12$.

8. (12 баллов) Стендап-комик собирается выступать в течение 20 лет. Для этого ему каждый год нужно рассказывать по 3 шутки. Чтобы его не освистали, в течение любых двух лет подряд шутки не должны повторяться, и каждый год должна быть рассказана хотя бы одна шутка, которая не встречалась в предыдущие четыре года выступлений. Каким наименьшим числом шуток сможет обойтись комик?

Ответ: 9.
Решение: За первые два года придется использовать не менее 6 шуток (поскольку они не могут повторяться). В каждый из следующих трех лет понадобится по крайней мере, по одной новой шутке. Поэтому всего нужно, как минимум, 9 разных шуток. Дальше

можно повторять 5-летний цикл. Есть пример циклической последовательности троек шуток (1, 2, ... , 9), удовлетворяющей всем требованиям: 123 456 127 348 569.

9. (14 баллов) У вас есть три положительных числа X>Y>Z, причем X/Y > 2. За один ход вы можете уменьшить величину X на удвоенную величину Y, а остальные два числа оставить без изменений. Если при этом окажется, что наибольшее из получившихся чисел более чем вдвое больше среднего из них, вы можете сделать аналогичный следующий ход: уменьшить наибольшее на удвоенную величину среднего. Так вы повторяете до тех пор, пока либо отношение наибольшего к среднему окажется не более 2, либо одно из чисел обнулится.
Какое наибольшее число ходов может длиться такой процесс?

Ответ: бесконечно много.
Решение: Пусть x – положительный корень уравнения x^3-2x^2-1=0 (такой корень существует и больше 2, так как функция $f(x)= x^3-2x^2-1$ при x=2 отрицательна, а при x=3 положительна). Если взять исходные числа равными x^3, x^2 и x, то первое будет наибольшим, а второе – средним по величине, так как $x^3=2x^2+1 > x^2 > x$. После того, как его уменьшат, оно окажется равным 1, то есть тройка чисел станет такой: x^2, x, 1. Эта тройка пропорциональна исходной (все числа x раз меньше), поэтому при следующем уменьшении каждое из чисел снова уменьшится в x раз. То же самое будет происходить при всех последующих ходах – процесс с этими числами никогда не завершится.

10. (16 баллов) Семья рыбаков - отец и сын - хочет переправить боевую группу на Тайный остров. У них есть одна двухместная лодка. Вначале дорогу до Тайного острова знает только рыбак-отец. Но дорога лежит мимо Сторожевой башни, и каждый может пройти мимо неё не более 6 раз (иначе поднимется тревога). Все остальные могут стать проводниками, запомнив дорогу на остров. Рыбаку-сыну для этого достаточно проплыть на остров всего один раз, а бойцам для запоминания нужно проплыть туда и обратно. В конце рыбаки должны быть дома, а все бойцы – на острове. Для какого наибольшего числа бойцов удастся организовать переправу? (Доказывать максимальность не нужно, приведите число бойцов, которое вы смогли переправить с соблюдением всех правил.)

Ответ: 8.
Решение: Введём обозначения: О – отец, С – сын, цифра – боец, → рейс на остров, ← рейс обратно. План переправы:
О1→, О1←, О2→, О2←, ОС→, О←, 13→, 1←, 14→, С←, С5→, С←, С6→, С←, 27→, 2←, 28→. (Запомнили дорогу С, 1, 2. О и С сделали по 6 рейсов, остальные проводники по 5, потому что им нужно переправиться на остров).